此 卷 只 装 订 不 密 封

姓名________ 准考证号 考场号 座位号

绝密 ★ 启用前

辅初第一卷 · 二试专题

组合，数论，图论方向考试

本试卷共 4 页，4 题．全卷满分 180 分．考试时间 240 分钟．

出卷人：缪语博

审卷方：辅初考试研究院，皖辅教育集团

注意事项：

1. 答题前，先将自己的姓名、准考证号、考场号、座位号填写在试卷上，
2. 解答题的作答：用黑色签字笔直接答在试卷上上对应的答题区域内．
3. 考试结束后，请将本试卷以及草稿纸一并上交．
4. 考试严禁作弊，包括但不限于传抄答案，使用电子设备等，一经发现立即满分处理.

一、第一题（40 分）

求证：给定正整数 n，则 $\dfrac{\left[\sum\limits_{i=1}^{n}(i,n)\right]\left[\sum\limits_{d\mid n}d\cdot\varphi(d)\right]}{n^3}\geqslant 1$，其中，$(i,n)$ 表示 i 与 n 的最大公约数，$\varphi(d)$ 表示小于等于 d 的所有正整数中与 d 互质的数的个数．

注：事实上，左式的值非常小，在 $n\leqslant 10^4$ 的情况下，左式的值甚至不超过 9，大部分的值都在 $[1,4]$ 这个区间内．

二、第二题（40 分）

定义 p 为 $[1,n]\bigcap\mathbb{N}$ 的一个排列．令 $f_k(p)=\{\max\limits_{1\leqslant i\leqslant k}\{p_i\},\max\limits_{2\leqslant i\leqslant k+1}\{p_i\},\cdots,\max\limits_{n-k+1\leqslant i\leqslant n}\{p_i\}\}$，$g(a)$ 为 a 中不同元素的个数．定义 S 为 $[1,n]\bigcap\mathbb{N}$ 的所有排列的集合．给定 n 和 p，求 $\sum\limits_{p\in S}g(f_kp)$ 的值．

三、第三题（50 分）

一个有 n 个节点的树，设它的节点分别为 $v_1, v_2, \cdots, v_n$，已知第 i 个节点 v_i 的度数为 d_i，问满足这样的条件的不同的树有多少棵.

注：树为无向无环的连通图.

四、第四题（50 分）

给定两个正整数 x 和 y. 如果序列 $\{F_i\}$ 满足以下条件，则称其为 x 的一个 y-因式分解:

（1）序列 $\{F_i\}$ 有 y 个元素，且所有元素都是整数;

（2）$\prod\limits_{i=1}^{y} F_i = x$ （即序列中所有元素的乘积等于 x）.

你需要计算有多少个两两不同的序列是 x 的 y-因式分解. 两个序列 A 和 B 被认为不同，当且仅当存在至少一个 i（$1 \leqslant i \leqslant y$）使得 $A_i \neq B_i$.