此卷只装订不密封

姓名________ 准考证号 考场号 座位号

绝密 ★ 启用前

辅初第一卷 · 二试专题

组合，数论，图论方向考试 · 参考答案

本试卷共 4 页，4 题．全卷满分 180 分．考试时间 240 分钟．

出卷人：缪语博

审卷方：辅初考试研究院，皖辅教育集团

注意事项：

1. 答题前，先将自己的姓名、准考证号、考场号、座位号填写在试卷上，
2. 解答题的作答：用黑色签字笔直接答在试卷上上对应的答题区域内．
3. 考试结束后，请将本试卷以及草稿纸一并上交．
4. 考试严禁作弊，包括但不限于传抄答案、使用电子设备等，一经发现立即满分处理．

一、第一题

1.（40 分）

求证：给定正整数 n，则 $\dfrac{\left[\sum\limits_{i=1}^{n}(i,n)\right]\left[\sum\limits_{d|n} d\cdot\varphi(d)\right]}{n^3}\geqslant 1$，其中，$(i,n)$ 表示 i 与 n 的最大公约数，$\varphi(d)$ 表示小于等于 d 的所有正整数中与 d 互质的数的个数．

注：事实上，左式的值非常小，在 $n\leqslant 10^4$ 的情况下，左式的值甚至不超过 9，大部分的值都在 $[1,4]$ 这个区间内．

解答

注意到，$\sum\limits_{i=1}^{n}(i,n)=\sum\limits_{j=1}^{n}\left(j\cdot\sum\limits_{i=1}^{n}\langle (i,n)=j\rangle\right)=\sum\limits_{d|n}d\cdot\varphi\left(\dfrac{n}{d}\right)=\sum\limits_{d|n}\dfrac{n}{d}\cdot\varphi(d)=n\sum\limits_{d|n}\dfrac{\varphi(d)}{d}$（其中，$\langle P\rangle$ 表示若事件 P 为真，则值为 1，否则为 0），所以一把柯西下去，$L.H.S\geqslant\dfrac{n\left(\sum\limits_{d|n}\varphi(d)\right)^2}{n^3}=1$，证毕．

□

二、第二题（40 分）

定义 p 为 $[1,n]\bigcap\mathbb{N}$ 的一个排列．令 $f_k(p)=\{\max\limits_{1\leqslant i\leqslant k}\{p_i\},\max\limits_{2\leqslant i\leqslant k+1}\{p_i\},\cdots,\max\limits_{n-k+1\leqslant i\leqslant n}\{p_i\}\}$，$g(a)$ 为 a 中不同元素的个数．定义 S 为 $[1,n]\bigcap\mathbb{N}$ 的所有排列的集合．给定 n 和 p，求 $\sum\limits_{p\in S}g(f_kp)$ 的值．

解答 显然，$f_k(p)$ 出现新的元素时，即 $\max\limits_{l\leqslant t\leqslant l+k-1}(p_t)\neq\max\limits_{l+1\leqslant t\leqslant l+k}(p_t)$，当且仅当 $\max\limits_{l\leqslant t\leqslant l+k-1}(p_t)=p_l$（原本的最大值被移出区间）或 $\max\limits_{l+1\leqslant t\leqslant l+k}(p_t)=p_{l+k}$（新出现的元素是最大值），对两种情况分别计数，再去掉交集．

$\max\limits_{l\leqslant t\leqslant l+k-1}(p_t)=p_l$ 会产生 $S_1=(n-k)(k-1)!(n-k)!\sum\limits_{m=1}^{n}\binom{m-1}{k-1}$ 个不同元素．$n-k$ 表示长度为 k 的区间有 $n-k$ 位置可以放置（区间 $[n-k+1,n]$ 无法再向后移动，故不计入其中），$(k-1)!$ 表示区间内元素排列的方案数（需要保证最大值排在最左端，故只有 $k-1$ 个元素进行排列），$(n-k)!$ 表示区间之外的元素进行排列的方案数，m 是枚举的最大值，$\binom{m-1}{k-1}$ 表示区间内最大值之外的元素的选择方案数（要保证 m 是最大值，其余元素只能在 $[1,m)$ 内取值）．

$\max\limits_{l+1\leqslant t\leqslant l+k}(p_t)=p_{l+k}$ 会产生 $S_2=(n-k)k!(n-k-1)!\sum\limits_{m=1}^{n}\binom{m-1}{k}$ 个不同元素．$n-k$ 表示长度为 k 的区间有 $n-k$ 位置可以放置，$k!$ 表示区间内元素排列的方案数（此时最大值在区间之外，故有 k 个元素进行排列），$(n-k-1)!$ 表示区间之外的元素进行排列的方案数（需要保证最大值是区间右端点的下一个元素，故只有 $n-k-1$ 个元素进行排列），m 是枚举的最大值，$\binom{m-1}{k}$ 表示区间内最大值之外的元素的选择方案数（此时最大值在区间之外，故区间内有 k 个元素需要进行选择）．

用容斥原理去掉交集．考虑 $\max\limits_{l\leqslant t\leqslant l+k-1}(p_t)=p_l$ 和 $\max\limits_{l+1\leqslant t\leqslant l+k}(p_t)=p_{l+k}$ 同时成立时，有 $S_3=(n-k)(k-1)!(n-k-1)!\sum\limits_{m=1}^{n}\binom{m-1}{k-1}(n-m)$ 个元素被重复计数．$n-k$ 表示长度为 k 的区间有 $n-k$ 位置可以放置，$(k-1)!$ 表示区间内元素排列的方案数，$(n-k-1)!$ 表示区间之外的元素进行排列的方案数，m 是枚举的一个最大值，$\binom{m-1}{k-1}$ 表示区间内最大值之外的元素的选择方案数，$n-m$ 表示另一个最大值的取值方案数（需要限制一个最大值小于另一个才能使计算的方案数不重不漏）．

最终答案 $Ans=S_1+S_2-S_3+n!$（每种排列的 $f_k(p)$ 的首个元素都未被计入，故需要加上 $n!$）．

$$S_1=(n-k)(k-1)!(n-k)!\sum_{m=1}^{n}\binom{m-1}{k-1}=(n-k)!\sum_{m=1}^{n}\frac{(m-1)!}{(m-k)!}(n-k)$$

$$S_2=(n-k)k!(n-k-1)!\sum_{m=1}^{n}\binom{m-1}{k}=(n-k)!\sum_{m=1}^{n}\frac{(m-1)!}{(m-k)!}(m-k)$$

$$S_3=(n-k)(k-1)!(n-k-1)!\sum_{m=1}^{n}\binom{m-1}{k-1}(n-m)=(n-k)!\sum_{m=1}^{n}\frac{(m-1)!}{(m-k)!}(n-m)$$

$$Ans=S_1+S_2-S_3+n!=2(n-k)!k!\sum_{m=1}^{n}\binom{m-1}{k}+n!=2(n-k)!k!\binom{n}{k+1}+n!=\frac{2(n-k)n!}{(k+1)}+n!$$

□

三、第三题（50 分）

一个有 n 个节点的树，设它的节点分别为 $v_1, v_2, \cdots, v_n$，已知第 i 个节点 v_i 的度数为 d_i，问满足这样的条件的不同的树有多少棵.

注：树为无向无环的连通图.

解答 我们如下定义 $prufer$ 序列.

我们需要重复进行以下操作，直至树中只剩下两个点：

(1) 找到一个度数为 1，且编号最小的点.（其中编号最小保证了后面将会提到的 $prufer$ 序列的唯一对应性，同时也方便从 $prufer$ 序列转化回无根树）

(2) 把这个点的父亲节点加入序列，然后把这个点从树中删除.

然后我们就得到了一个长度为 $n-2$ 的序列，这就是 $prufer$ 序列.

我们再尝试从 $prufer$ 序列推导到无根树.

我们需要重复进行以下操作，直至点集中只剩下两个点：（初始化所有点都在点集中）

(1) 取出 $prufer$ 序列最前面的元素 x.

(2) 取出在点集中的、且当前不在 $prufer$ 序列中的最小元素 y.（这恰好呼应了前面提到过的选取编号最小的节点）

(3) 在 x, y 之间连接一条边.（注意前面的取出相当于删除）

最后，我们在点集中剩下的两个点中连一条边.

显然这有 $n-1$ 条边，且绝对不会形成环，因此它是一棵树，且就是原树.

我们发现其有以下性质：

(1) 度数为 d_i 的节点会在 $prufer$ 序列中出现 $d_i - 1$ 次.

当某个节点度数为 1 时，会直接被删掉，否则每少掉一个相邻的节点，它就会在序列中出现 1 次.

因此共出现 $d_i - 1$ 次.

(2) 一个 n 个节点的完全图的生成树个数为 n^{n-2}.

对于一个 n 个点的无根树，它的 $prufer$ 序列长为 $n-2$，而每个位置有 n 种可能性，因此可能的 $prufer$ 序列有 n^{n-2} 种.

又由于 $prufer$ 序列与无根树一一对应，因此生成树个数应与 $prufer$ 序列种树相同，即 n^{n-2}.

(3) 对于给定度数为 $d_{1\backsim n}$ 的一棵无根树共有 $\dfrac{(n-2)!}{\prod_{i=1}^{n}(d_i-1)!}$ 种情况.

由上面的性质可以知道，度数为 d_i 的节点会在 $prufer$ 序列中出现 $d_i - 1$ 次.

则就是要求出 $d_i - 1$ 个 $i(1 \leqslant i \leqslant n)$ 的全排列个数.

而上面那个式子就是可重全排列公式.（即全排列个数除以重复元素内部的全排列个数）

回到原题，答案即为 $\dfrac{(n-2)!}{\prod\limits_{i=1}^{n}(d_i-1)!}$.

□

四、第四题（50 分）

给定两个正整数 x 和 y. 如果序列 $\{F_i\}$ 满足以下条件，则称其为 x 的一个 y-因式分解：

（1）序列 $\{F_i\}$ 有 y 个元素，且所有元素都是整数；

（2）$\prod\limits_{i=1}^{y} F_i = x$ （即序列中所有元素的乘积等于 x）.

你需要计算有多少个两两不同的序列是 x 的 y-因式分解. 两个序列 A 和 B 被认为不同，当且仅当存在至少一个 i（$1 \leqslant i \leqslant y$）使得 $A_i \neq B_i$.

解答 首先正负数不用管，最后乘 2^{y-1} 即可，即确定了所以 $|F_i|$ 后，前 $n-1$ 个正负随便填，最后一个可以根据前面的唯一算出来.

接着，我们将 x 分解，设 $x = p_1^{e_1} p_2^{e_2} \cdots p_k^{e_k}$.

我们对每个质因子 p_i 分开考虑：

也就转化为将 e_i 个随便分给 y 个数字，形式化的说，就是求有多少序列 $b_1, \cdots, b_y \geqslant 0$，使得 $\sum\limits_j b_j = e_i$.

这个问题就是插板法，答案是 $C_{e_i+y-1}^{y-1}$.

于是答案即为 $2^{y-1} \prod\limits_{i=1}^{k} C_{e_i+y-1}^{y-1}$.

□